تطوّر الرياضيّات وتطوّر برهان رياضي

د. عبد الكريم اليافي

بين العلوم وشائـج قربى كالتي بين الناس من نسب ومصاهرة تقريبا . واذا جاز هذا التشبيه فانا نتصور كائنا ذكراً هو المنطـق بمعنـاه العام الواسع الذي يفيد حركة الفكر السليم، لا منطق أرسطو ولا منطق هيغـل ، وأنثيين همـا الفلسفـة والرياضيات . ونبـالغ في التشبيه فنتصـور المنطق قد تزوج الفلسفة فولدت لهما الرياضيـات . ونقصـد بالرياضيـات رياضيات الرياضيين ، لا الرياضيات الميتافيزيائيـة التي كان بعض الفلاسـفة كالفيثاغوريين يعتبرونها كنه الكون وكنـه الموجودات .

لنتأمل أول الأمر ملامح كل من هذه الكائنات الفكرية الثلاث ، مثلما نتأمـل ملامح بعض الأعلام .

لقد جاء في التـراث العـربي[1] أن المنطق يسمى علم الميـزان اذ به تـوزن الحجج والبراهين . كـان أبو علي ابـن سينا يسميه خادم العلوم اذ ليس مقصوداً بنفسه بـل هو وسيلة الى العلوم فهـو كخادم لها . وكان أبو نصـر الفـارابي يسميه رئيس العلوم لنفـاذ حكمه فيهـا فيكون رئيساً حاكماً عليها . وانما سمي بالمنطق لأن النطق يطلـق على اللفظ ،وعلى ادراك الكليـات ، وعـلى النفس الناطقة ولما كان هذا الفن يقـوّي الأول أي اللفظ ويسـلك بالثـاني أي ادراك الكليات مسلك السداد ويُحصّل بسببه كمـالات الثـالث أي كمـالات النفس الانسانية الناطقة اشتق اسم منه وهـو المنطق . انه يزن الأمور ويسدد الحكـم

وينتقل بالفكر من المعلوم الى المجهول أي ينتقل بالفكر الى مكاسب جديدة متطورة دائمة .

أما الفلسفة أو الحكمة فهي علم يبحث عن أحوال أعيان الموجودات على ما هي عليه في نفس الأمر بقدر الطاقة البشرية . والغرض منها الوقوف على حقائق الأشياء كلها على قدر ما يمكن للانسان أن يقف عليه ويعمل بمقتضاه ليفوز بسعادة الدارين[٢] .

وأما الرياضيات أو الرياضة أو العلم الرياضي فقد تطور تعريفها واختلفت ملامحها في خلال العصور وما زالت على رغم طعنها في السن فتاة لعوباً عروباً تغازل العلوم فتحفزها على النشاط والتقدم وتيسر تطبيقات عجيبة . وقد جاء في التراث العربي[٣] انها علم بأحوال ما يفتقر في الوجود الخارجي دون التعقل الى المادة كالتربيع والتثليث والتدوير والكروية والمخروطية والعدد وخواصه. وتسمى أيضاً بالعلم التعليمي وبالعلم الأوسط وبالحكمة الوسطى . وقد ورد في رسائل اخوان الصفا أن علم العدد جذر العلوم وعنصر الحكمة ومبدأ المعارف وأسطقس المعاني[٤] . والى علم العدد ينضاف علم الهندسة وعلم النجوم والموسيقى والنسب العددية وغيرها . لقد خلّفت الرياضيات منذ القدم علوماً ذكوراً واناثاً كثيرة .. انها بالتعبير العربي القديم أم ضانيء" ناتق أي كثيرة الأولاد .

تهمنا في حديثنا الرياضيات وحدها وان كان لا بد من الرجوع في الحين تلو الحين الى شيء من الفلسفة والى نصيب ولو نزراً من المنطق . لا بد من الرجوع الى الأبوين الكريمين اذ بهذا الرجوع الى الأصل يقوى الفرع ويزدهر .

يتألف الفكر الرياضي من المحاكمة القائمة على البرهان ذي الصفة الضرورية ومن الأشياء التي تجري عليها المحاكمة .

هنالك اذن في أصل الرياضيات المحاكمة الصرف والأشياء في أشكالها الأولى التي كانت عبارة عن الأعداد الصحيحة وبعض الأشكال الهندسية البسيطة وكان علم العدد أي الحساب وعلم الأشكال أي الهندسة لا يكادان يفصلان فعل المحاكمة عن موضوعات المحاكمة . هكذا كان الأمر عند الرياضيين اليونان الأوائل، وأبرزهم

الفيثاغوريون ثم استطاع المفكرون بعدما يقرب من مائة عام تقريباً أن يتناولوا بالفحص التصورات الكلية منفكة عن التعينات الحسية ولكن هذا الانفكاك جرى خارجاً عن نطاق العلم الرياضي · جرى على يد أرسطو المعلم الأول حين أنشأ وليداً للمنطق العام هو المنطق الصوري القائم على المحاكمة الصرف ·

وورث العرب علوم اليونان وعلوم غيرهم من الأقوام الأخرى القديمة وأولوا جميع العلوم التي ورثوها عنايتهم الفائقة فقويت تلك العلوم وبلغت أشدها في عهودهم ·

لا شك أن علم الجبر كانت له بواكير قبل العرب ولكن استقلاله واسمه ونشأته القوية كانت في زمن الخليفة المأمون مع محمد بن موسى الخوارزمي صاحب «كتاب الجبر والمقابلة» وهو الذي احتفل العالم بذكراه في عام ١٩٨٣ لمرور ما يقرب من اثني عشر قرناً على ميلاده ، كما تقدمت الهندسة والحيل (الميكانيك) والحركات والموسيقى والنجوم مع سميه محمد بن موسى الخوارزمي وأخوي هذا الأخير أحمد والحسن حين أظهروا عجائب الحكمة على حد تعبير صاحب الفهرست · ولسنا هنا في صدد بيان فضل العرب على تقدم الرياضيات بل في صدد تطور هذا العلم وما لحقه من تطور البرهان الرياضي وتطور المحاكمة ·

وكما ورث العرب علوم الأقوام السالفة وزادوا فيها ورث الأوربيون علوم العرب ، ومنها الرياضيات وزادوا فيها · في سنة ١٦٩١ عرف الرياضي الفرنسي جاك أوزانام (١٦٤٠ـ١٧١٨) الرياضيات بأنها علم يدرس كل ما يمكن أن يقاس أو يعد · وهو تعريف يشمل الحساب والهندسة ولا يختلف عن تصور الرياضيات عند اقليدس ويكاد يقترب من تصورها عند العرب اذ لا يبدو أن الجبر داخل فيها · وفي القرن الثامن عشر قُسِم العلم الرياضي الى رياضيات بحتة وهي لا تعالج الا طرق المحاكمة والى رياضيات مختلطة وهي تدرس خواص الكميات الملازمة لأشياء محسوسة وتعتمد على التجريب · وهي ما يمكن دعوته أيضاً بالرياضيات الفيزيائية كذلك نشأت اذ ذاك تسميات أخرى مثل الرياضيات النظرية والرياضيات العملية · وفي باكورة القرن التاسع عشر آثر العلماء أن يتكلموا على الرياضيات التطبيقية بدلا من الرياضيات المختلطة ·

ثم ان التفريق بين الرياضيات التطبيقية والرياضيات البحتة يبدو غير دقيق في بعض الاعتبارات · كانت الهندسة تعد من الرياضيات البحتة مع أنها تتناول المكان الطبيعي أو الفيزيائي وأصبحت اليوم معدودة من تطبيقات تلك الرياضيات · وعلى العكس كان حساب الاحتمال معدوداً مدة طويلة في الرياضيات التطبيقية وغدا يعد في الرياضيات البحتة منذ أقامه الرياضي السوفياتي أندري كلموغوروف Andrei Kolmogorov على مصادرات عام ١٩٣٣ ·

ثم تداعى التعريف التقليدي للرياضيات نحو منتصف القرن التاسع عشر · كتب الرياضي الانكليزي جورج بول George Boole (١٨١٥ ــ ١٨٦٤) في كتاب له بحث فيه قوانين الفكر وطبق فيه الرياضيات على المنطق ما معناه أن الرياضيات ليس من خصائصها الاشتغال بالعدد ولا بالكمية وانما هي دراسة طرق المحاكمة والبرهان · ولا شك أنه نشأ رياضيون في ذلك العهد في أمم أخرى اتجهوا مثل هذا الاتجاه فدخلت الرياضيات في المنطق أو دخل المنطق في الرياضيات. وفي سنة ١٨٧٤ أوضح الرياضي الفرنسي جان غاستون داربو Jean Gaston Darboux (١٨٤٢ ــ ١٩١٧) أن من قضايا الرياضيات الأساسية التقيد بقانون مزدوج وهو تحديد الفروض التي يستند اليها الرياضي وتعريفها تعريفاً دقيقاً ثم الاقتصار على ما هو ضروري منها في بناء النظرية · وقد تأكد هذا الاتجاه الشكلي فكتب صديق لهذا الرياضي وهو رياضي أيضاً اسمه جول هيل Jule Hoüel (١٨٢٣ــ١٨٨٦) في عام ١٨٧٨ ما معناه أن العلم المجرد ينبغي أن يبحث أول الأمر في الفروض هل هي متوافقة فيما بينها أي ليس بينها تناقض ثم هل يمكن رجع بعضها الى بعض بحيث يكون لدينا منها أقل عدد ممكن · فاذا استطعنا أن نحقق ذلك أقمنا علماً صحيحاً من الناحية العقلانية والتجريدية ولو لم ينطبق هذا العلم على مقتضيات الواقع التي تريد أن يمثلها ذلك العلم · هذا القسم المنطقي من العلوم الدقيقة هو ما ندعوه بالرياضيات الصرف[٥] ·

ولا بد من التنويه في هذا الشأن بجماعة الرياضيين الفرنسيين الذين كتبوا باسم مستعار هو نيكولا بُرْباكي وأعادوا تأليف الرياضيات حوالى ١٩٣٩ بالرجوع الى أصلها المنطقي · وكذلك تجدر الاشارة الى الرياضي الألماني ريشارد ديدكند (١٨٣١ ــ ١٩١٦) منشى الجبر الحديث ، ثم الى الرياضي الألماني جورج

كنتور الذي كانت أعماله كالثورة في ميدان الرياضيات اذ نوه بحرية الابداع فكتب ما معناه « لا أرى ما يمكن أن يحول بيننا وبين نشاط يبدع طائفة جديدة من الأعداد حين يكون ادخالها بين طوائف أخرى يُرجى منه تقدم العلم ... من دون هذا التوسع لا أستطيع المضيّ الى الأمام ولكني به أدرك كل ضروب المفاجآت »(٦).

هذا وقد غدت الرياضيات في العصر الحاضر لا تقتصر على اعداد القوانين التي تنتظم الواقع وترصده وتلخص هذا الرصد بل تسبق الرصد والملاحظة وتعمد الى تأمل الفروض والعلاقات التي قد لا يكون لها في الواقع تطبيقات رغبة منها في التعميم وفي قياس الأمور على مثيلاتها . وهكذا يتبدى من هذا العرض الخاطف التطور الدائم في هذا العلم التليد الطريف والقديم الحديث الذي يبهر الخاطر ويقوم على أساس المحاكمة ويتقيد بقواعد المنطق وقوانينه ويستشف في الحين بعد الحين مكانته في نطاق الفلسفة والعلوم الأخرى .

★ ★ ★

ان العلم ثمرة من ثمرات المجتمع . ويمكن لمؤرخ العلوم وللفيلسوف أن يشرح علاقة العلوم وتطورها ونموّها بالمراحل التاريخية وأساليب الحياة الاجتماعية وازدهارها وهو عندئذ يظهر الصفة الاجتماعية والحضارية للعلم وللمعرفة بأنواعها .

ولقد أبان الفيلسوف الألماني اشبنغلر بوجه الخصوص علاقة الرياضيات بالحضارات وذلك في الفصل الذي عقده عن معنى الأرقام . فكل حضارة تتضمن طرازاً من الرياضيات معيناً لأن الرياضيات عند هذا المفكر علم ذو منهج دقيق كالمنطق ولكنها أوسع نطاقاً منه وأكثر خصباً ، ولأن الرياضيات ثانياً عنده فن صرف يضعها الى جانب الفنون التشكيلية والموسيقى وذلك بالنظر الى حاجتها للالهام الموجه والى المصطلحات الشكلية التي يتضمنها نموها ، ولأن الرياضيات ثالثاً وأخيراً فلسفة وميتافيزياء عالية كما أوضح أفلاطون قديماً وكما أوضح ليبنتز .

ولهذا كله يبرز اشبنغلر المعاني المختلفة التي يجدها للرياضيات في الحضارات المتفرقة المختلفة ويقرن تكاملها بأوج تكامل بعض الفنون في تلك الحضارات وهذا مدعاة للرياضي الى التأمل والتفكير والاستفادة .

★ ★ ★

لا غرو أن تتطور أصول البرهان مع تطور العلم وان بقي خلال هذا التطور محافظاً على صفته العقلانية الضرورية المبرمة ·

لقد نوه العلماء بقيمة البرهان في العلم حتى انهم سووه به رغبة منهم في الوصول الى اليقين فلقد قالوا : ان البرهان هو العلم منظوراً اليه في أدواته وان العلم هو البرهان منظوراً اليه في نتائجه وثمراته · ومع ذلك فيصح لنا عند النظر في تطور الرياضيات أن نقول ان العلم هو البرهان منظوراً اليه في أسلوبه أو في طريقته أو ان البرهان هو المحاكمة العقلية السليمة ·

للبرهان الرياضي أنواع عدة · فهنالك البرهان الرياضي النظري بشكليه التركيبي والتحليلي · أما التحليلي فاما أن يكون مباشراً أي تفرض المسألة فيه محلولة واما أن يكون غير مباشر ويدعى هذا برهان الخلف حيث يظهر امتناع نقيض القضية التي يراد اثباتها ·

وأما التركيبي فهو استنتاجي انشائي تلزم فيه النتيجة عن المبادىء بالضرورة · وهنالك أنواع أخرى للبرهان كالبرهان الاستقرائي · وأياً كان الأمر فان هذه البراهين نظر اليها الفلاسفة واعتبروها خارجية ·

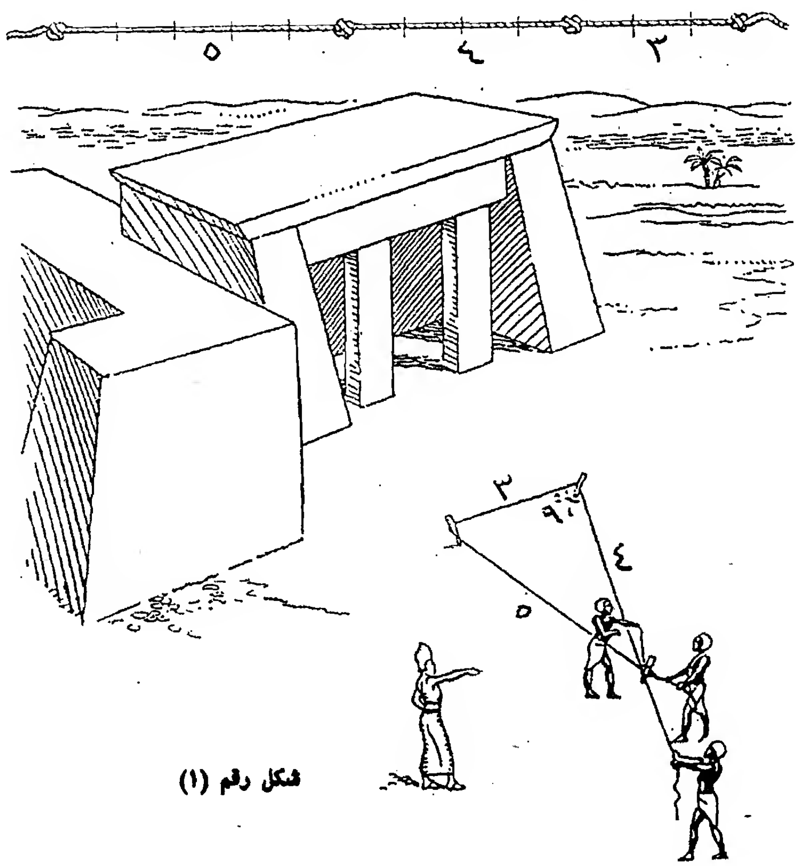
نضرب مثلا البرهان الرياضي في نظرية فيثاغورس · لقد قل من النظريات الهندسية ما لقي في تطاول تاريخه من الشرح والتعليق والتطبيق وحل المسائل ما لقيته نظرية فيثاغورس المعروفة في الهندسة المستوية ، وهي التي تربط تكافؤ المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية مع المربعين المنشأين على ضلعيه الأخريين ·

اننا لا نزال نتذكر عندما كنا طلاباً في المدارس الثانوية الموكب الضخم الذي يرافق هذه النظرية من المسائل والتمرينات الهندسية، اذ كان الاطلاع عليها مرحلة مهمة في دراسة الهندسة الاقليدية · كذلك ما زلنا نتذكر كتب المنطق التي تبحث مناهج العلوم كيف تضرب هذه النظرية في كثير من الأحايين مثلا على طبيعة البرهان الرياضي وعلى خصبه ·

ويعرف مدرسو الرياضيات ما لهذا العلم من معقولية واتساق وشمول يستهويهم ويجعلهم يشعرون بلذة خاصة تشبه في كمال الأداء وحسن الترتيب ودقة الارتباط لذة الفن وجماله · وكأني بهم حين يصلون في تدريسهم الى نظرية فيثاغورس

يشعرون ببلوغهم حداً جديداً يغدق عليهم سعة في التطواف الفكري · وكأنما تؤلف تلك النظرية مجالا في الهندسة الاقليدية كبيراً ينضاف الى المجالات الأخرى لأنها في الحقيقة تقابل خاصية عميقة من خصائص تلك الهندسة ·

ونريد أن نتناول بالبحث « ماهية » تلك النظرية وتطور البرهان عليها · عرف هذه النظرية المصريون الأوائل والبابليون · وكانت معرفتهم لها تطبيقية وقياسية · لقد دفعت الممارسة وتنظيم الأراضي وبناء المعابد وغيرها البابليين والمصريين الى التماس الحصول على زاوية قائمة وذلك بتقسيم حبل ثلاثة أقسام أطوالها ٣ ، ٤ ، ٥ من الوحدات القياسية التي كانوا يستعملونها ثم تثبيت عُقَد التقسيم بأوتاد صغيرة أو دبابيس فيحصلون على كوس هندسي لا عيب فيه:



شكل رقم (١)

$$٩ + ١٦ = ٢٥$$

$$٣^٢ + ٤^٢ = ٥^٢$$

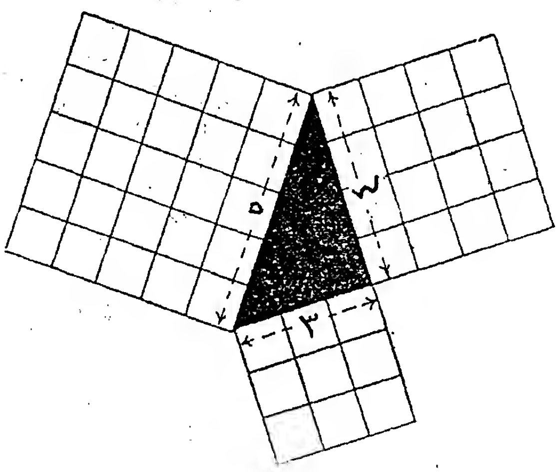
أي ان مجموع مربعي ضلعي الكوس يساوي مربع الضلع الثالث ٠

وكذلك الأمر اذا كانت الأقسام : ٥ ، ١٢ ، ١٣

٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

٥٢ + ١٢٢ = ١٣٢

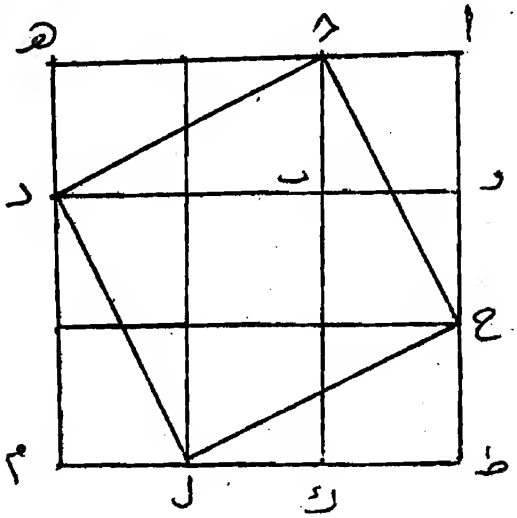
ويذكر المؤرخ اليوناني هيرودتس أن النيل كان يفيض فيزيح الأُرَفَ أي العلامات الدالة على حدود الحقول عن مواضعها ويهيىء أسباباً للخلاف والنزاع حول مساحات الملكيات فكانت عند المصريين هيئة مؤلفة من المسّاحين تشرف على تنظيم الملكيات كما تشرف على تنظيم الري واقتراح مقادير الضرائب ، ولا بد في ذلك من حساب السطوح متخذين المربع وحدة يعتمدونها في هذا الحساب فأفضى بهم ذلك الى معرفة تلك النظرية(٧) ٠



شكل رقم (٢)

ويرى لنسلوهغبن الذي كان أستاذاً في جامعة آبردين في كتابه « الرياضيات للجميع » نقلا عن كتاب « تاريخ الرياضيات » لداود سميث أن الصين عرفت نظرية فيثاغورس قبل اليونان وذلك بالاستناد الى رسوم وردت في كتاب « الملك شو لي سوان » ٠ وهو أقدم عهداً من فيثاغورس(٨) ٠ ولكن اليونان كانوا أكثر حرصاً على تسجيل علومهم وما تلقفوه منها عن جيرانهم وعن الحضارات المتقدمة ٠

لننعم النظر كيف أقام الفيثاغوريون من اليونان البرهان على النظرية معتمدين مربعات ومثلثات كما في الشكل(٣) :



شكل رقم (٣)

المربع ا هـ م ط=المربع جـ د ل ح + ٤ المثلث جـ هـ د

المربع ا هـ م ط = المربع ب د م ك +المربع ا جـ ب و + ٤ المثلث جـ هـ د

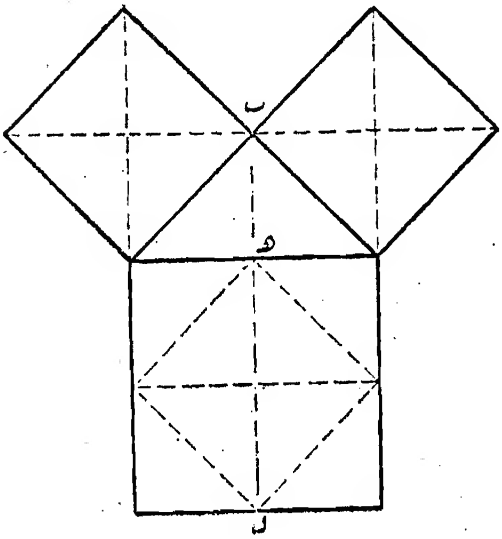
واذن المربع جـ د ل ح=المربع ب د م ك + المربع ١ جـ ب و

ويكون جـ د^{٢} = د ب^{٢} + ب جـ^{٢}

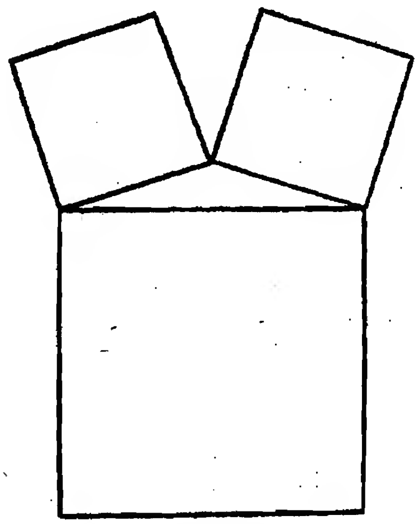
وقد تلقى العرب هذه المعلومات وتأملوها • ولما جاء ثابت بن قرة الحراني (٨٢٦/٢٢١ م ـ ٢٨٨ هـ/ ٩٠١) عدل البرهان على الشكل الذي يتداوله كتب الهندسة المستوية في العصر الحاضر[٩] •

لا بأس في أن نتعقب برهان هذه النظرية. نتبين أول الأمر حالاته الخاصة فنجد فيها نوعاً من الاستقراء بحيث ينتقل الخصوص بنا الى العموم ثم يفضي العموم الى عموم أكثر وأشد[١٠] •

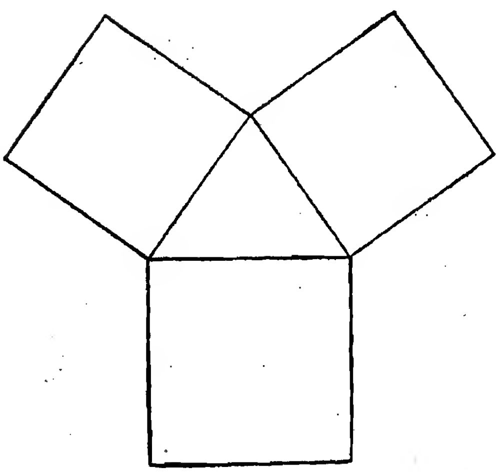
شكل رقم (٤)
احدى المخطوطات العربية التي فيها نظرية فيثاغورس
(نسخت المخطوطة للمرة الثانية عـــام ١٣٥٠ م)



شكل رقم (٥)



شكل رقم (٦)



شكل رقم (٧)

لنأخذ اذن في البداية حالة خاصة وهي حين يكون المثلث القائم الزاوية متساوي الساقين ، نجد عندئذ أن الشكل اذا رسمنا فيه بعض الخطوط الاضافية يحوي مضلعات متناظرة بسيطة بمجرد تأملها تتأكد لدينا صحة دعوى فيثاغورس. فالمثلثات البارزة في الشكل المخطط تبدو متساوية ومتطابقة جميعاً كل منها لا يختلف عن الآخر الا بمكانه • بل نكاد نشعر تجاه تأمل هذا الشكل المخطط في هذه الحالة الخاصة أن نقل كل من هذه المثلثات وتطبيقه على المثلث الآخر لا يحول دونه أي حائل فكري ، وأن التطابق بينها قوي لدرجة أن الحيز الذي يشغله كل منها يلوح تابعاً لمجرد المصادفة والاتفاق •

ونلاحظ أن دعوى فيثاغورس لا تصح في المثلث المتساوي الساقين اذا لم يكن قائم الزاوية ، ويبدو عدم صحتها فوراً بالنظر الى المثلث المنفرج الزاوية ، اذ يكون المربعان المنشآن على ضلعي الزاوية المنفرجة صغيرين • وكذلك لا تصح في المثلث الحاد الزاوية ، اذ يكون المربعان المنشآن على ضلعي الزاوية الحادة كبيرين. فالتكافؤ التام لا يحصل الا حين تكون الزاوية قائمة •

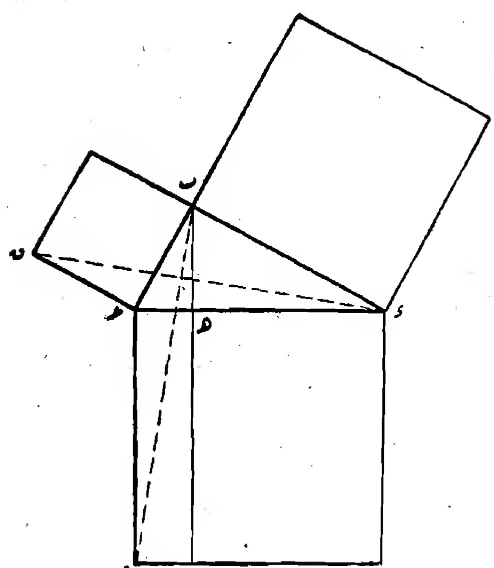
ولكن المسألة تتعقد بعض الشيء حين نريد الآن أن نبرهن على دعوى فيثاغورس من أجل كل مثلث فيه زاوية قائمة •

لم يكن كل ما سلف الا توطئة تربوية تري في الحقيقة اراءة ساذجة وبصورة حدسية مباشرة صحة المساواة في حالة خاصة • ولكن هذه التوطئة ليست خالية النفع في اثبات المساواة من أجل كل مثلث قائم الزاوية اذا صرفنا النظر عن البرهان كما تداوله اليونان وانتهينا للتعديل الجيد الذي أدخله العالم الحراني • نستطيع هنا أن نستشف امكان الاستفادة من هذا الخط ب هـ ل المرسوم في الحالة الخاصة الأولى التي قدمناها شكل (٥) ، والذي لعب دوراً هاماً في ابراز تساوي المثلثات الجزئية وتطابقها • ان أكثر أساتذة الرياضيات حتى الآن عند برهانهم على نظرية فيثاغورس يلتمسون هذا الخط التماساً ليبدؤوا برهانهم دون أن يعرفوا لِمَ انتخبوا هذا الخط دون غيره • لقد قال الباحث الفيلسوف ميرسون انه بعد خمسين سنة ما زال يتذكر الصعوبة التي كان يلتمس بها الخطوط المساعدة على البرهان • ولا شك أن هذه الصعوبة تشير الى سبل تخطيطية ممكنة مفاجئة في الشكل • والتربية العقلية في الرياضيات من شأنها أن تقلل هذه المفاجآت وأن

تمهد تمهيداً مناسباً لنضج البرهان ولوضوحه ولابرازه ابرازاً قوياً . ونحن حين قدمنا حالة المثلث القائم الزاوية الخاصة حين يكون متساوي الساقين نكون قد هيأنا تهيئة ملائمة طالب الرياضيات لأن يلتمس البرهان على تكافؤ المربع الصغير والمستطيل الصغير في المساحة. وذلك بعد اعتمادنا حيلة رسم الخط ب هـ ل . ومتى استطعنا البرهان على تكافؤ مساحة المربع والمستطيل في الجانب الأيسر اتضح بالبداهة امكان اعادة البرهان نفسه على تكافؤ المربع والمستطيل في الجانب الأيمن .

ولا يخفى أن ما رأيناه سابقاً في الحالة الخاصة من وضوح تساوي المثلثات وتصور انتقالها بالفكر وانطباق بعضها على بعض لا يحصل ههنا، فلنبحث اذن عن الوسائل التي نستطيع بها أن نقيم البرهان بصورة غير مباشرة . رسم ثابت الخط ب ل ووصل دق ، ب و ، وأخذ نصف المربع أي المثلث ب حـ ق ونصف المستطيل أي المثلث حـ هـ و . فالمثلث ب حـ ق يساوي المثلث ق حـ د (لأن لهما قاعدة واحدة ق حـ ، وارتفاعاً واحداً ب حـ) . والمثلث حـ هـ و يساوي المثلث ب حـ و (لأن لهما قاعدة واحدة حـ و ، وارتفاعاً واحداً حـ هـ) .

ومن السهل ملاحظة تساوي المثلثين ق حـ د ، ب حـ و (لأن زاويتين فيهما متساويتان ق حـ د = ب حـ و ، ولأن الضلعين اللتين حول كل زاوية منهما تساويان الضلعين اللتين حول الأخرى) . وهكذا ننتهي الى أن مساحة المربع تساوي مساحة المستطيل في الجانب الأيسر . ومثل ذلك يحصل تماماً من أجل المربع والمستطيل في الجانب الأيمن . والبرهان كله انما يتم باعتماد سلسلة من المساويات أو المطابقات . هذا ولكن اليقين بالبرهان انما يتم بشيء من البطء نظراً لطول سلسلة المساويات تلك ، ولا يتوكد هذا



شكل رقم (٨)

اليقين الا باعتماد هذه السلسلة من المساويات والمرور بها بشيء من السرعة. وذلك أن اليقين متصل بتنظيم الذاكرة حيث تتكاثف عناصر البرهان ثم يتلامح هذا التكاثف في زي الحدس · والمعلم المربي الماهر هو الذي يقود التلميذ الى هذا النوع من التكاثف الحدسي اذا صح هذا التعبير ، مع الانتباه عند كل برهان للسرعة اللازمة في تقديم عناصره ·

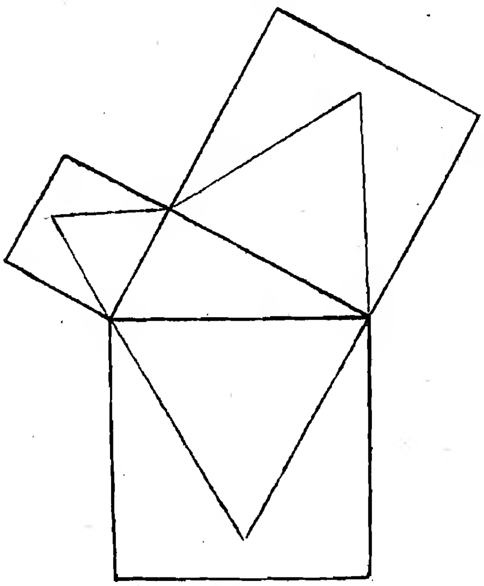
ان هذه الخاصية في المثلث القائم الزاوية وهي التي يطلق عليها نظرية فيثاغورس تصور الى مدى بعيد معقولية الرياضيات وجمالها · ولم يكن فيثاغورس هو أول من اهتدى اليها كما سلف آنفاً · ومن المعلوم أن العرب في باكورة حضارتهم قد اطلعوا على هذه النظرية على طريق كتب أقليدس وحلوا بالاعتماد عليها مسائل كثيرة وطوروا البرهان عليها تطويراً ملائماً هو الذي يدرّس الآن في المدارس الثانوية · ومهما يكن من أمر هذه النظرية في تاريخ العلوم فان فلسفة العلوم تنوّه بها تنويهاً · ان المثلث القائم الزاوية في الشكل السابق يحمل على ضلعيه مربعين وعلى وتره مربعاً يساوي مجموعهما · فالشكل بالجملة يعطي ضرباً من الشعور بالتوازن والتكافؤ عميقاً ومعقولا · وكأنما ينضاف الى حكم الحقيقة ، الذي يفيد أن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمتين، قيمة نشعر بها شعوراً بالتوازن غامضاً. ولكن هذا الشعور اذا عالجناه بالتدقيق والتحليل انتهينا الى أن الحقيقة الكبرى في الأفكار لا ترتبط بالملاحظات الأولى التي نلاحظها على شكل خاص وتدرك جملة ادراكاً مباشراً ، وانما تقوم على العكس بجانب الشمول المتحصل في ثنايا حدس مهيأ ومروّى فيه · ولسنا هنا نقف تلقاء برهان مصنوع على شكل بسيط معين ، بل نحاول أن نتجاوزه الى ماوراء الأشكال البسيطة ، وأن ننفذ الى معقولية البرهان في ذاته ، ونسعى أن نتلمس « السبب الرياضي » الذي يكمن ويثوي فيه على الطراز الذي كان أفلاطون وأتباعه تقريباً يتكلمون فيه على المثل السرمدية القائمة في العالم المعقول · ومتى بلغنا الى هذا السبب الرياضي أو المثال المعقول أدركنا خصب هذا السبب وثراء ذلك المثال وعرفنا أن دعوى فيثاغورس ليست الا حالة خاصة بين عدد لا يتناهي من الحالات ، وأن تلك الدعوى لا تأخذ حقاً قيمتها الا عند انضوائها في قانون عام شامل · وهنا تكمن أصالة فكرة الرياضي الفرنسي بوليغان الحديث الذي رجع البرهان الى منبعه الأول ·

فاذا التمسنا مع هذا الرياضي السبب العميق لنظرية فيثاغورس أي اذا بحثنا عن السبب الذي من أجله كان المربع بين الأشكال الهندسية هو الذي يأتي هنا فيبرز خاصية تتعلق بأضلاع المثلث القائم الزاوية لم نلبث أن نرى اعتماد المربع هنا ليس الا عارضاً وسبباً اتفاقياً وليس صميمياً • فالمربع ليس الا شكلا بين آلاف الأشكال التي تخول ابراز خاصية المثلث القائم الزاوية •

وحقاً كان للمربع في هذا الشأن ميزة تاريخية تفوق استحقاقه • وسنرى كيف تنخفض هذه الميزة عند التعمق وانعام النظر •

وفي الواقع اذا أمكن للمربع أن يبرز خاصية المثلث القائم الزاوية فلمجرد أنه « مضلع منتظم »، ولأن جميع المربعات متشابهة كتشابه جميع المضلعات المنتظمة ذات العدد المتساوي من الأضلاع •

ولا شك أن خاصية المثلث القائم الزاوية التي تعلنها دعوى فيثاغورس صحيحة من أجل كل مضلع منتظم • ويبدو ذلك بوضوح متى قبلنا تلك الدعوى في شكلها المدرسي • فمن السهل عندئذ أن نتيقن صحتها من أجل المثلثات المتساوية الأضلاع شكل (٩) • ذلك أن مساحة المثلث المتساوي الأضلاع المرسوم على ضلع مربع تساوي مساحة المربع مضروبة بـ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ • فالسطوح الحاصلة برسم مثلثات متساوية الأضلاع على أضلاع المثلث القائم الزاوية تساوي سطوح المربعات المرسومة عليها مضروبة بمقدار $\frac{\sqrt{3}}{4}$ • وبعبارة أخرى يكفي أن نضرب طرفي المعادلة التي تفيد دعوى فيثاغورس بالعامل $\frac{\sqrt{3}}{4}$

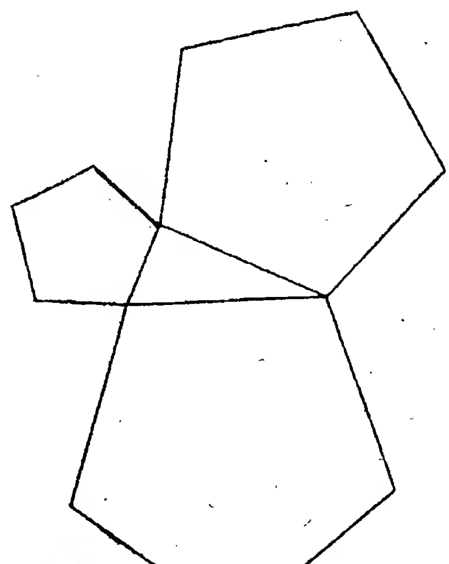


شكل رقم (٩)

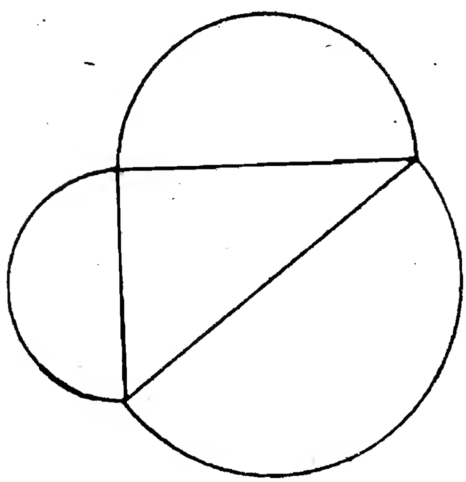
حتى نحصل على دعوى جديدة وهي أن المثلث المتساوي الأضلاع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المثلثين المتساويي الأضلاع المنشأين على الضلعين الآخريين •

ويصح أن نعلن مثل هذه الدعوى من أجل المخمس المنتظم اذا ضاعفنا طرفي معادلة فيثاغورس بعامل أكبر من الواحد معين • وبوجه عام يصح افادة الخاصية الآتية : كل مضلع منتظم عـدد أضلاعه ن منشـأ على وتر المثلث القائم الزاوية يكافىء في المساحة مجموع المضلعين المنتظمين اللذين عدد أضلاع كل منهما ن والمنشأين على الضلعين الأخريين •

ان نظرية فيثاغورس قد اكتسبت شمولا جميـلا بهـذه الافـادة الأخـيرة وتجـاوزت حـالـة المـربـع الخاصـة تجاوزاً كبـيراً • ولكن يمكن توسعتهـا أيضاً وزيادة شمولها • لقد ظهـر لنا أن هذه النظرية صحيحـة من أجـل جميـع المضلعات المنتظمة • لننعم النظر في هذا الشرط الذي هو الانتظام نتجـه اذ ذاك الى التمـاس السبب العميق لنظـريـة فيثاغورس المعممة • ان هذا الانتظـام ليس في الحقيقة الا تعبيراً لفظياً موجـزاً عن شيء آخر هو التشابـه الهندسي •• ذلك أن جميع المضلعـات المنتظمـة ذات العدد (ن) من الأضلاع متشابهة : المربعات متشابهة ، والمثلثات المتساوية الأضـلاع متشابهة ، والمخمسات متشابهة وهلـم جـرا •



شكل رقم (١٠)



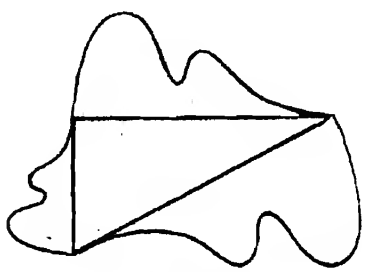
شكل رقم (١١)

فاذا كان ثمة شكل غير مضلع ولكنه يتصف بخاصية التشابه الهندسي صحت من أجله دعوى فيثاغورس • فنصف الدائرة المرسوم مثلا على الوتر تساوي مساحته مساحتي نصفي الدائرتين المرسومين على الضلعين الأخريين •

وهكذا عند التماس السببية العقلية لنظرية فيثاغورس انتقلنا بالتدريج من المربعات الى المضلعات المنتظمة ، ومن المضلعات المنتظمة الى الأشكال المتشابهة . فالسببية العقلية تكمن في التشابه •

ونستطيع أن نتخيل أشكالا غريبة متشابهة • منها هذا الشكل رقم (١٢) •

وكلها تحقق خاصية المثلث القائم الزاوية • ونكون عندئذ قد بلغنا ذروة العموم والشمول في دعوى فيثاغورس القديمة بمجرد كشفنا عن سبب تلك الخاصية العقلي • وهي خاصية غريبة للمثلث القائم الزاوية في تصرفه هذا التصرف المتوازن المعقول بتوزيع جميع الأشكال الهندسية المتشابهة • وليس لغير المثلث القائم الزاوية هذه الخاصية • فهي مقصورة في الحقيقة على الزاوية القائمة في المثلث •



شكل رقم (١٢)

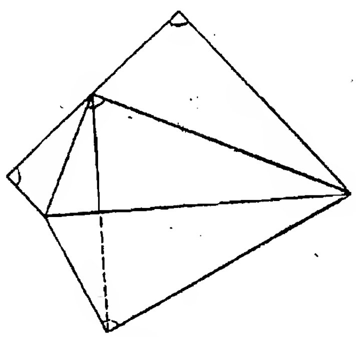
ان صفة التعامد في الخطوط لا تبقى ذاتها اذا أخذ مرتسم لها • ولذلك ليس في هندسة المرتسمات فيثاغورية • ولما كانت الهندسة الاقليدية متصلة بزمرة الانتقالات والتشابهات تبين أن نظرية فيثاغورس تشرف على أعماق الهندسة الاقليدية •

تبدو اذن لنظرية فيثاغورس قيمة فلسفية كبيرة • ومن المفيد حقاً بيانها في شمولها وعمومها الكبيرين • ولا تجوز تجزئتها والاقتصار على حالة المربع الخاصة اذ لا يظهر عندئذ عمق خاصية المثلث القائم الزاوية ولا مدى شمولها الواسع البعيد • لا يظهر « مثال » هذه الخاصية على حد تعبير أفلاطون • لا نشهد عندئذ على غور الكهف أو على اللوح الأسود الا ظلا لحقيقة عقلية كبيرة • فالمربع ان هو الا عرَض ، والتشابه هو « الفكرة المجردة » التي

تعطي « القانون » في المثلث القائم الزاوية · والتجريد هنا يغدق على هذه الخاصية نوراً ثراً يضيء جميع الأشكال المتشابهة التي منها المربعات ·

ولكن لا ننس أن الشمول الواسع الذي يلغناه شيئاً فشيئاً وبعد لأي يبقى متصلا بدعوى النظرية في شكلها التاريخي القديم البسيط · ذلك أنا بدأنا البرهان على صحتها بالمربعات ثم صعدنا الى المضلعات المنتظمة فالمضلعات المتشابهة · ترى هل لذلك الشكل البسيط القديم ميزة خفية محجوبة عنا ؟ ·

لا ريب أنه يمكن القيام ببرهان أولي على شكل آخر غير المربع ثم تعميمه على المربع ، وهو ما صنعه بوليغان ، اذاعتمد حالة بسيطة بالغة النهاية في البساطة ، وبذلك كأنه أقام البرهان على الخاصية الفيثاغورية الصميمية ذاتها في المثلث القائم الزاوية ·

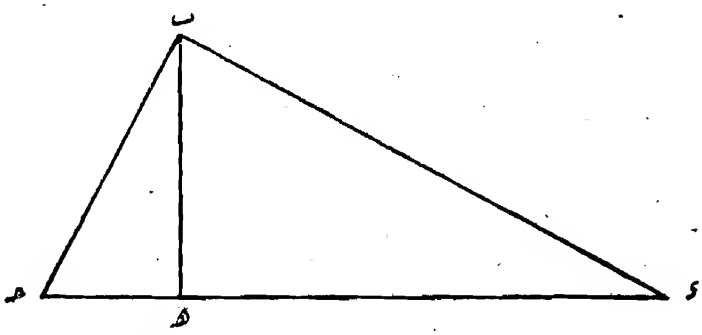


شكل رقم (١٣)

فهو قد اختار للبرهان مثلثات قائمة الزوايا متشابهة ومشابهة للمثلث الأصلي شكل (١٣) · ويبتدر من تأمل الشكل فوراً أن المثلثين القائمي الزاوية المرسومين على الضلعين القائمتين انما هما المثلثان الحاصلان في المثلث الأصلي عند رسم ارتفاعه ، والمثلث المرسوم على الوتر انما هو نظير المثلث الأصلي ، ونلاحظ أن الخط الذي كنا بحثنا عنه للبرهان في الشكل المدرسي القديم انما هو عبارة عن ارتفاع المثلث نفسه ·

بيد أننا هل نحتاج الى رسم هذه المثلثات الخارجية ؟ ان المرء الذي تعود التجريد بعض الشيء يستطيع أن يتأمل خاصية المثلث القائم الزاوية في الشكل الآتي الذي هو أكثر الأشكال اختصاراً ·

لنتأمل بالفعل هذا المثلث القائم المرسوم فيه ارتفاعه نجد أننا برسم الارتفاع أنشأنا في داخل المثلث الأصلي مثلثين قائمي الزاوية مشابهين للمثلث



شكل رقم (١٤)

الأصلي ، والمثلث القائم الزاويــة الذي يمكن أن نرسمه على الوتر خارج المثلث نرسمه هذه المرة في « داخل المثلث » فهو عندئذ ينطبق على المثلث الأصلي تماماً.

ويكون مجموع المثلثين ب حـ هـ ، ب هـ د يساوي المثلث ب حـ د . وهكذا يكون قد تم البرهان بدون حيلة ولا تكلف.

والبرهانات على هذه الخاصية مــن أجل المضلعات الأخرى يسهل اشتقاقها من البرهان الحاصل من هذا الشكل الموجــز البسيط ، اذ يمكن عندئذ أن نكتب :

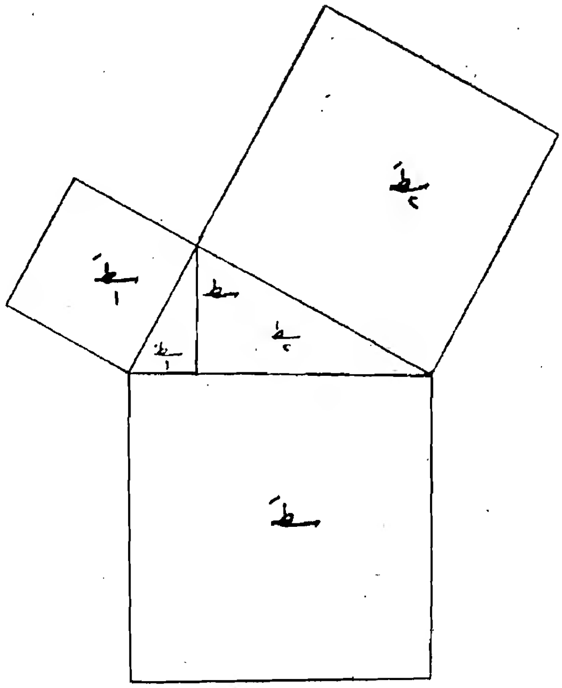
$$\frac{\text{سط}}{\text{سط}'} = \frac{\text{سط}٢}{\text{سط}'٢} = \frac{\text{سط}١}{\text{سط}'١}$$

$$\frac{\text{سط}}{\text{سط}'} = \frac{\text{سط}١ + \text{سط}٢}{\text{سط}'١ + \text{سط}'٢}$$

ولما كان سط = سط ١ + سط ٢ لزم سطَ = سطَ ١ + سطَ ٢

ويترتب على ذلك فوراً أن المربــع المرسوم على الوتــر يســاوي مجمــوع المربعين المرسومين على الضلعين الأخريين.

ومع ذلك فان التشابــه أيضــاً بين المثلث الأصلي وكل من المثلثين اللذين هما جزآه يتيح كتابة العلاقات الآتية :



شكل رقم (١٥)

$$\frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{د ب}}{\text{هـ د}}$$ ومنه $\text{د ب}^{٢} = \text{حـ د} \cdot \text{هـ د}$

وكذلك :

$$\frac{\text{حـ د}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{حـ هـ}}$$ ومنه $\text{ب حـ}^{٢} = \text{حـ د} \cdot \text{حـ هـ}$

$$\text{د ب}^{٢} + \text{ب حـ}^{٢} = \text{حـ د} \, (\text{حـ هـ} + \text{هـ د}) = \text{حـ د}^{٢}$$

ان دعوى فيثاغورس القديمة تفقدهكذا قيمتها التاريخية ، لتبدو مكانها قيمة البرهان الأصيل الذي حدسه بوليغان ، وهو البرهان الذي كان ينبغي أن يتم من الوجهة المنطقية في التاريخ قبل أي برهان آخر . ذلك أننا نرى في هذا البرهان الأصيل المنطقي خاصية المثلثالقائم في ذات المثلث القائم دون الحاجة

الى أي مضلع آخر • وهو برهان منطقي متى أدركناه وعينّاه فوراً ، وهيهات من بداهته وسرعته استغلاق البرهان التاريخي وبطؤه •

ان الزمن المنطقي ذو سرعة مستحبة وكأنها ذات نشوة • اننا نتذوق به لذة التفكير العقلي الصرف الفعال • نحن هنا ازاء هذا النسق العقلي ندرك أفواج الأشكال المتتالية في لحظة مختصرة من الزمان حين نبلغ في هذا الشأو الى حدس الأمور الاستنتاجية •

ذلك أنه تلزمنا معرفة طويلة استنتاجية حين نتأمل الشكل (١٤) ونستعرض مختلف الأشكال التي تتعاقب في خيالنا عند تأملنا هذا الشكل •

والا لو اقتصرنا على مجرد الملاحظة لما تجاوزنا موضوع البديهية المشهورة القائلة ان الكل يساوي مجموع الجزأين • يلزمنا اذن تفكير مليّ وطويل لكي ندرك أن المثلث القائم الزاوية المرسوم فيه ارتفاعه يحمل في تضاعيفه بزرة الخاصية الفيثاغورية صرفاً تامة خالصة • وكأنما متى أدركنا فلقتي هذه البزرة في جزأي المثلث الحاصلين بمد الارتفاع طالعتنا من ورائها أفواج الأزهار المتنوعة التي تزهر بها تلك النظرية •

ومتى اعتبرنا جملة الأفكار الحاصلة من هذه النظرية ابتداء من البرهان الأصيل البسيط رأينا أن الشرح الرياضي ليس تبسيطاً وانما هو تعقيد ، اذ نستطيع بالاستناد الى ذلك البرهان البسيط أن نحل مجموعة من المسائل يزداد تعقيدها واشتباكها شيئاً فشيئاً •

ألا ترى بعد اذ رسمت المثلث القائم الزاوية وأنزلت من رأسه الارتفاع الذي قسمه شطرين وتأملته طويلا ورويت فيه حتى اتضحت لك منه الخاصية الفيثاغورية كأنك تزودت من ذلك بشعاع يهديك سبل البرهانات ؟ فلو سألك سائل مثلا أثبت لي أن المضلع المنتظم ذا الاثنتي عشرة ضلعاً المرسوم على الوتر يساوي مجموع المضلعين الآخرين المنتظمين اللذين كل منهما ذو اثنتي عشرة ضلعاً لم تضل أمام هذا السؤال ، بل وجدته نتيجة بسيطة لما أدركت سابقاً من خاصية المثلث القائم الزاوية اذ تعلمت أن تفكر دون أن تصنع شيئاً وأن تعلم دون أن تقوم بأي عمل •

اذا بلغنا هذه المرحلة وعرفنا « السبب الأول » في دعوى فيثاغورس عجبنا مما كتبه هيغل في كتابه « فينومينولوجيا الفكر » • ان هيغل نفسه قد اعتمد على نظرية فيثاغورس في بيان رأيه في البرهان الرياضي • فهو يرى أن البرهان المدرسي الذي كان قد ظنه الوحيد انما هو « عملية خارجية » • ولما كان التفكير في المعرفة الرياضية عنده عملية خارجية عن الشيء الذي نتفكره تبدل هذا الشيء من جراء ذلك • فالوسيلة وهي الانشاء والبرهان تشتمل في رأيه على مقدمات صحيحة ولكن المضمون غائب. فالمثلث قد قطع الى أجزاء وأجزاؤه حولت الى عناصر وأشكال أخرى ولدها الانشاء ولا نعود الى المثلث الأول الا في النهاية وهو الأصل في الموضوع وقد غاب عنا خلال البرهان كله •

هذا الحكم الذي حكمه هيغل على البرهان الرياضي هو حكم أكثر الفلاسفة الذين ينظرون الى ذلك البرهان من الخارج • وهم في ذلك على قسط من الصواب لأن طائفة من البراهين المتداولة هي من هذا النوع الذي هو عملية خارجية. ولكن هيغل لم يعش الفكر الرياضي حقاً ان صح هذا التعبير • على حين أننا هنا مع الرياضي بوليغان قد بلغنا من خلال هذه النظرية التي ضربناها مثلا الى ماهية البرهان الرياضي العميقة وتبينا السبب العميق فيها • وبعد اذ أدركنا السبب العميق تتابعت البرهانات أمام أفكارنا تترى بسيطة سريعة حتمية • وكأنما بذلك كشفنا عن جانب واسع من المعقولية بين جوانب هندسة اقليدس ، يتضح فيه كثير من المسائل اتضاحاً ذاتياً من تلقاء أنفسها ، كدعوى أن المثلث الذي أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ انما هو قائم اذ كانت تخضع للعلاقة الحسابية :

$$٣^{٢} + ٤^{٢} = ٥^{٢}$$

وكغيرها من الدعاوى التاريخية العملية المتعلقة بنظرية فيثاغورس مثل اقامة أعمدة متعددة بأطراف حبل عينا فيه ثلاث نقاط هي : ب ، حـ ، د ، كما بينا آنفاً فهذه كلها أمور ثانوية بالنسبة الى حتمية البرهان الذاتي الرئيسية •

★ ★ ★

المصـــادر والمراجـــع :

١ ـ كشاف اصطلاحات الفنون للشيخ التهانوي طبعة كلكتاص ٣٧ ٠
٢ ـ نفسه ص ٣٦ ٠
٣ ـ نفسه ص ٤٢ ٠
٤ ـ رسائل اخوان الصفا المقدمة ص ١ ٠

5 — **La Grande Encyclopédie Française, Mathématiques.**
6 — **Encyclopaedia Universalis.**

7-8— **Les mathématiques pour tous, Lancelot Hogben, traduction française, Paris, payot 1947, p. 59 et pp. 54-55.**

٩ ـ العلوم البحتة في الحضارة العربية والاسلامية بقلم الدكتور علي عبد الله الدفاع مؤسسة الرسالة ص ١٧٩ ـ ١٨١ ٠
هذا وقد عمم ثابت بن قرة فوجد العلاقة لمربع ضلع في مثلث مختلف الأضلاع ٠

١٠ـ في سنة ١٩٤٢ كلف جورج بوليغان أستاذ الرياضيات في كلية العلوم بالسربون القاء بضع محاضرات في منهج الرياضيات على طلاب « شهادة الفلسفة العامة والمنطق » بكلية الآداب من الجامعة نفسها ، وطبعت محاضراته هذه في السنة نفسها في كتاب صغير اقتصر تداوله على الطلاب ٠ وفي سنة ١٩٤٢ عالج غاستون بشلار أستاذ فلسفة العلوم بالسوربون في جملة ما عالجه برهانا خاصا على نظرية فيثاغورس كان بوليغان قد ذكره في محاضرته ٠ ثم أثبت بشلار ذلك في كتابه « المذهب العقلي التطبيقي » سنة ١٩٤٩ ٠
ونحن الذين عرفنا الأستاذين وسمعنا المحاضرتين وقرانا الكتابين استفدنا منهما في تعليقاتنا الواسعة ٠

★ ★ ★

فائـــدة لغويـــة املائيـــة

في العربية ألفاظ تكتب بالسين أو بالصاد ، نظمها الحريري في المقامة الحلبية وهي :

ان شئت بالسـين فاكتب مـا أبيّنـه	وان تشـأ فهـو بالصـادات يكتتب
مغس(١)وفقس(٢)ومسطار(٣)ومُمتَلس(٤)	وسالغ(٥) وسـراط(٦) الحق والسَّقب(٧)
والسامغان(٨)وسَقر(٩)والسويق(١٠)ومسلا	ق(١١) وعن كل هـذا تفصح الكتب

الشـرح :

١ ـ وجع البطن ٠
٢ ـ خروج ما في البيضة ٠
٣ ـ الخمر المزة ٠
٤ ـ هو الذي يسقط من يدك ولا تشعر به يقال امتُلِس وامتُلص وتملّس وتملص ٠
٥ ـ آخر أسنان ذوات الظلف وهو السن الذي بعد السديس من البقر أو الشاة وذلك في السنة السادسة ٠ فولد البقرة أول سنة عجل ثم تبيع ثم ثني ثم رباع ثم سديس ثم سالغ سنة ثم سالغ سنتين الى ما زاد ٠ وولد الشاة أول سنة حَمَل أو جدي ثم جذع ثم ثني ثم رباع ثم سديس ثم سالغ ٠
٦ ـ طريق ٠
٧ ـ بفتح السين والقاف بمعنى القرب ٠
٨ ـ ملتقيا الشفتين وهما بالصاد أشهر ٠
٩ ـ لغة في الصقر ٠
١٠ـ الخمر ودقيق الحنطة والشعير ٠
١١ـ مسلق وسلاق بالسين والصاد خطيب بليغ مرتفع الصوت٠